16 Nombres rationnels.

À cette étape de votre scolarité les nombres ont de multiples formes : nombres entiers, écritures décimales, fractionnaires, écritures scientifiques.

Faisons un peu de ménage dans cet embrouillamini.

I Une petite histoire des nombres.

Les premiers nombres servaient à dénombrer, c'est-à-dire à compter les objets : 1, 2, 3, et ainsi de suite. Si cela nous paraît naturel, que l'on songe à l'effort de conceptualisation qu'il fallut faire pour considérer qu'il y avait quelque chose de commun entre 3 souris et 3 éléphants.

Le nombre est un objet qui ne se préoccupe pas de ce qu'on observe. Il n'est associé à aucune sorte particulière d'objets à aucune unité de mesure.

Il fallut faire des partages et les fractions firent leur apparition. Mais dans un premier temps il s'agissait de méthodes de calcul et non de nombres. Ainsi dans l'antiquité grecque les fractions étaient considérées comme des ratios c'est-à-dire des rapports entre des longueurs et non comme des nombres ; il s'agissait d'un lien ente deux nombres et non d'un unique nombre. Mais les Grecs furent embêtés par un nombre qui n'existait pas : $\sqrt{2}$. En effet, s'il est possible de dessiner cette longueur, il est impossible de l'exprimer dans un ratio avec les nombres entiers (nombres incommensurables).

Il fallut très longtemps pour que l'absence d'objet put être considérée comme un nombre. Les nombres sont nés pour la comptabilité et la géométrie (au sens littéral de mesure de la Terre) domaines qui s'intéresse à ce qui est, et non à ce qui n'est pas. Inventé dès le VII$^{\text{e}}$ siècle en Inde le zéro n'apparaît en Europe qu'au X$^{\text{e}}$ siècle.

Si conceptuellement l'acceptation du zéro fut difficile, son utilisation combinée à celles des chiffres arabes pour écrire les nombres fit florès.

Il existait des systèmes décimaux depuis le III$^{\text{e}}$ siècle avant Jésus-Christ mais l'écriture était lourde. Si α avait représenté le nombre 1 et β le nombre 10 voici comment les égyptiens auraient écrit 43 : $\beta\beta\beta\beta\alpha\alpha\alpha$.

Grâce à l'emploi du zéro positionnel nous avons notre système d'écriture : sans les zéros qui le suivent nous ne pourrions pas savoir que le 1 dans l'écriture 100 représente une centaine.

Le zéro positionnel permet de manipuler avec une grande aisance les fractions dont le dénominateur est une puissance de 10 ; ce que les élèves appellent « les chiffres après la virgule ».

Les nombres négatifs ne furent acceptés qu'au XVIII$^{\text{e}}$ siècle. Ils furent découvert et utilisés bien avant mais leur acceptation en tant que nombre nécessitait de dépasser un grand nombre de paradoxes.

Nous avons donc, au terme de cette évolution, trois écritures des nombres : les nombres entiers, les nombres fractionnaires et les nombres avec une écriture décimale (auxquelles ont pourrait rajouter l'écriture scientifique ou l'écriture ingénieur mais ce sont des écritures qui servent essentiellement pour les valeurs approchées). À ces trois principales écritures se rajoute le signe puisque à chaque nombre positif lui correspond son opposé en négatif.

II Comparer des nombres.

Puisqu'il y a différentes écriture, il y a un risque qu'un nombre puisse avoir plusieurs écritures et que nous soyons incapables de nous en rendre compte. Il faut être capable de distinguer les nombres ; en mathématique nous dirons comparer.

Comparer deux nombres a et b c'est dire laquelle des trois possibilités suivantes, qui s'excluent mutuellement, est vraie : $a = b$, $a < b$ et enfin $a > b$.

Ceci revient à chercher le signe de la différence $a - b$.

Exemples.

Nous avons vu au collège différentes façons de faire ces soustractions mais le plus souvent il s'agit de se ramener à une différence de fractions.

1. $a = 3$, $b = 1000$,
2. $a = 17$ et $b = 16,80$.
3. $a = 34,07$ et $b = 34,7$.
4. $a = 4,3$ et $b = \frac{2}{10}$.
5. $a = 5$ et $b = \frac{1}{3}$.

Les écritures décimales ne sont pas forcément finie. Ainsi $\frac{1}{3}$ a une écriture décimale infinie : $\frac{1}{3} = 0,333\dots$.

Remarquons que nous ne pouvons pas utiliser les écritures décimales infinies sans un certain risque puisque : $0,333\cdots + 0,333\dots 0,333\cdots = 1$. Pourtant nous serions tentés de dire que $0,999\cdots < 1$.

Nous voyons avec ce dernier exemple que si nous devions retenir une seule méthode générale pour comparer les nombres ce serait de faire la différence de leur écriture fractionnaire.

Les grecs de l'antiquité qui manipulaient uniquement des fractions furent néanmoins confrontés à une difficulté : $\sqrt{2}$. C'est bien un nombre puisque c'est une longueur mais ce n'est pas une fraction (ce qui sera démontré dans la leçon traitant des multiples et diviseurs).

Autrement dit tous les nombres ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions.

Il a fallut commencer à penser à ranger les nombres pour y voir clair et repérer ceux qui manquaient.

III Les ensembles de nombres entiers.

Les *entiers naturels* sont les nombres qui servent à dénombrer, à compter. L'ensemble de tous les entiers naturels est :

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$$

Exemples.

1. 10^{13} est une entier naturel. Nous écrirons $10^{13} \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$ alors $2n$ est un nombre pair positif et $2n + 1$ est un nombre impair positif.

Les *entiers (relatifs)* sont les entiers naturels et leurs *opposés*. L'ensemble de tous les entiers (relatifs) est :

$$\mathbb{Z} = \{\dots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$$

Exemples.

1. $-123 \in \mathbb{Z}$.
2. $123 \in \mathbb{Z}$.
3. $0 \in \mathbb{Z}$.

Remarques.

1. Il est possible de reconnaître un nombre entier par l'un de ses développements décimaux infinis. En effet l'une de ses écritures décimales ne comporte que des 0 dans la partie décimale. Par exemple : $1,000\dots$ et $-234,000\dots$.

Proposition 1

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$.

Démonstration

Il y a deux choses à démontrer.

* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ par construction puisque nous avons jouter des éléments à $\mathbb{N}$ pour obtenir $\mathbb{Z}$.
* Pour montrer que $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ il suffit de montrer qu'il existe (au moins) un nombre entier relatif qui n'est pas un entier naturel. -1 n'est pas égale à 0 car sinon $1 = 0$ et n'est pas égale à un entier naturel strictement supérieur à 0 car sinon $1 + (-1)$ ne serait pas nul.

■

IV Ensemble des nombres rationnels.

1 Les fractions.

Définition 1

Une *fraction* est un nombre qui peut s'écrire comme le quotient d'un entier par un autre entier (non nul).

Remarques.

1. Lorsqu'un nombre, dans son écriture décimale, n'a que des zéros à partir d'un certain nombre de décimales alors on dit que c'est un *nombre décimal*. Ainsi : $2\,315{,}895\,643 = 2\,315{,}895\,643\,000\ldots$ est un nombre décimal.

   Tous les nombres décimaux peuvent s'écrire sous forme de fraction : $2\,315{,}895\,643 = \frac{2\,315\,895\,643}{1\,000\,000}$.
2. Il existe des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions : l'irrationalité de π est admise mais celle de $\sqrt{2}$ sera démontrée dans une prochaine leçon.
3. Rappelons une règle de priorité opératoire : dans une écriture fractionnaire la division correspondant à la barre de fraction est la dernière opération effectuée.
4. La manipulation des fractions nécessite de connaître les règles d'addition (réduire au même dénominateur), ♡

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay + xb}{by}$$

   de multiplication, ♡

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$$

   et de division ♡

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}.$$

   Rappelons encore que pour simplifier une fraction il faut qu'il y ait un facteur commun au numérateur et au dénominateur : ♡

$$\frac{a \times x}{b \times x} = \frac{a}{b}$$

5. Une astuce d'écriture qui nous sera souvent utile ♡

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$$

6. Rappelons enfin qu'il est impossible de diviser par 0.

   Démonstration

   Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un nombre q tel que $\frac{3}{0} = q$ (nous supposons que l'on peut diviser 3 par 0). Donc $3 = 0 \times q$. Ce qui est impossible car $0 \times q = 0$ (0 est une valeur absorbante). Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il est impossible de diviser 3 par 0.

   ■

7. Rappelons encore les règles de priorités :

   Priorité 1 Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires. La barre de fraction joue le même rôle que des parenthèses autour des numérateurs et dénominateurs.

   Priorité 2 Les puissances.

   Priorité 3 Les multiplications et division ($\div$) en allant de gauche à droite.

   Priorité 4 Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

2 Les nombres rationnels.

Définition 2

Les *nombres rationnels* sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction.
Ainsi un nombre x est rationnel s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{a}{b}$.
L'ensemble de tous les nombres rationnels est noté : $\mathbb{Q}$.

Exemples.

1. $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$ sont des nombres rationnels.
2. $1 = \frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$.
3. $0,1 = \frac{1}{10} \in \mathbb{Q}$.
4. Les racines carrées de nombres qui ne sont pas des carrés parfaits sont irrationnels : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... sont irrationnels. Si $n \in \mathbb{N}$ et si n n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
5. π et sont irrationnels.

Remarques.

1. Un entier est un nombre rationnel. Par exemple : $-13 = \frac{-13}{1}$.

2. Les nombres décimaux peuvent s'écrire comme des fractions donc ce sont des nombres rationnels. Ainsi : $0,1 = \frac{1}{10}$.
3. Il existe des nombres qui ne sont pas décimaux et qui sont rationnels. Ainsi $\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel mais son écriture décimale est infinie v(et ne comporte pas uniquement des 9 à partir d'un certain rang) donc ce n'est un nombre décimal.
4. Tous les nombres ne sont pas rationnels.
5. Lorsqu'un nombre rationnel a une écriture décimale infinie on préfère son écriture fractionnaire.
6. Un nombre rationnel admet une écriture fractionnaire canonique (unique) appelée la *forme irréductible* qui est obtenue lorsque le PGCD des numérateur et dénominateur est 1 (ils n'ont pas de facteur commun). *confer infra.*

Proposition 2

Lorsqu'un nombre a une écriture décimale infinie périodique c'est un nombre rationnel.

Remarques.

1. Ce résultat est admis.
2. On dit que l'écriture est périodique lorsqu'une série de chiffre se reproduit indéfiniment.

Exemples.

1. $0,333\dots$ est rationnel.
2. $45,78242424\dots$ est rationnel.

3 Nombres premiers.

Un entier naturel est dit *premier* si et seulement il a exactement deux diviseurs distincts positifs.

Exemples.

1. 12 n'est pas un nombre premier puisqu'il est divisible par 2 et 3.
2. Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
3. 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

4 Décomposition en facteurs premiers.

Théorème 1 - théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier naturel supérieur ou égale à 2 admet une décomposition en facteurs premiers unique à l'ordre des facteurs près.

Exemples.

1. $12 = 2 \times 2 \times 3$ et 2 et 3 sont bien des nombres premiers.
2. $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.
3. $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$.

Remarques.

1. Pour que l'écriture de la décomposition soit unique la convention est d'écrire une seule fois chaque facteur premier à la puissance convenable et d'écrire les facteurs dans l'ordre croissant. On n'écrira pas $3 \times 2 \times 3$ mais 2×3^2.
2. D'après ce théorème tous les résultats sur les nombre entiers naturels peuvent se ramener à des résultats sur les nombres premiers.

5 Forme irréductible d'une fraction.

Le nombre $\frac{1}{2}$ peut encore s'écrire $\frac{2}{4}$. L'écriture fractionnaire d'un nombre n'est pas unique. Ceci pouvant produire de la confusion les mathématiciens ont retenu une écriture fractionnaire qui est unique : *la forme irréductible d'une fraction*.

Proposition 3

Tout nombre rationnel s'écrit de façon unique comme une fraction dont le numérateur et le dénominateur non pas d'autre commun diviseur que 1 (ou -1).

Exemples.

1. $\frac{1}{3}$ est une forme irréductible.
2. $\frac{14}{21}$ n'est pas une forme irréductible puisque 14 et 21 admettent 7 pour diviseur commun : $\frac{14}{21} = \frac{2\times 7}{3\times 7} = \frac{2}{3}$.
3. En toute rigueur la forme irréductible de l'entier 5 devrait s'écrire $\frac{5}{1}$ cependant l'usage veut que nous usions de l'écriture la plus simple : 5.

Remarques.

1. Des nombres entiers qui n'ont pas de diviseur commun autre que 1 ou -1 sont dits *premiers entre eux*.
2. Pour trouver la forme irréductible d'une fraction il faut recherche le plus grand facteur commun au numérateur et au dénominateur qu'on appelle le P.G.C.D. (plus grand commun diviseur). Le P.G.C.D. s'obtient grâce à l'algorithme d'Euclide.
3. Dans la pratique pour trouver la forme irréductible nous utiliserons des décompositions en facteurs premiers.
4. La forme irréductible permet de déterminer le plus petit ensemble auquel appartient une fraction parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.

6 Un nombre célèbre pour son irrationalité.

Lemme 1

Soit $p \in \mathbb{Z}$.

Si ^{2} est pair alors p est pair.

Démonstration

Il s'agit de la contraposée de l'affirmation : « si $p \in \mathbb{Z}$ est impair alors p^2 est impair ».

■

Proposition 4 - Irrationalité de $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration

Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
Il faut interpréter ceci en utilisant la définition du nombre rationnel.
Il existe donc des entiers naturels p et q avec q non nul tels que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
Montrons que p et q sont des nombres pairs.

* Donc, en multipliant par q de part et d'autre dans l'égalité : $q\sqrt{2} = p$.
Nous allons nous ramener à l'arithmétique en utilisant des entiers naturels.

$$\left(q\sqrt{2}\right)^2 = p^2$$

nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}\right)^2 q^2 &= p^2\\ 2q^2 &= p^2\end{aligned}$$

Donc p^2 est pair et, d'après le lemme p est donc pair.

* Puisque p est pair il existe k tel que $p = 2k$. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}2q^2 &= (2k)^2\\ 2q^2 &= 4k^2\\ q^2 &= 2k^2\end{aligned}$$

Donc q^2 est pair et d'après le lemme q aussi est pair.

Nous avons obtenus ici une incohérence.

Si p et q sont pairs c'est qu'ils ont un diviseur commun : 2. La fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible ce qui contredit notre hypothèse.

Nous avons démontré, en raisonnant par l'absurde, que nécessairement, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

■

V Le dévissage de l'ensemble des nombres (les matriochka).

Proposition 5

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ mais $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$.

Démonstration

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. $n = \frac{n}{1}$ donc n peut s'écrire comme un rationnel et donc $n \in \mathbb{Q}$. Ceci étant vrai quelque soit le nombre n choisi : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
2. $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. En effet $0 < \frac{1}{3} < 1$.

■

Remarques.

1. Il est possible de reconnaître un nombre rationnel par son développement décimal infini. En effet celui-ci est nécessairement périodique (à partir d'un certain rang. Par exemples : $0,333\ldots$, $-12,343434\ldots$ et $3,000\ldots$ sont des nombre rationnels.

Proposition 6

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mais $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$.

Démonstration

1. L'inclusion découle du fait que $\mathbb{R}$ est construit à partir de $\mathbb{Q}$ en ajoutant d'autres nombre.
2. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. L'irrationalité de $\sqrt{2}$ sera pour l'instant admise.

■

Remarques.

1. Les nombres qui ne sont pas réels sont appelés des *nombres irrationnels*.
2. Il est possible de reconnaître un nombre irrationnel à son développement décimal infini : celui-ci ne comporte aucune périodicité (aucune répétition jusqu'à l'infini d'une série de chiffres). Par exemple π et $\sqrt{2}$ ont des développements décimaux infinis sans aucune répétition.

   Ces pour cette raison que les nombres irrationnels ne sont jamais présenté par leur écriture décimale mais par des lettres ou des symboles. Certains sont célèbres : π (pi), φ (nombre d'or), γ (constante d'Euler), e (constante de Neper), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

Il reste une ensemble classique de nombre que nous n'avons pas évoqué c'estl'ensemble des nombres décimaux, $\mathbb{D}$. Nous savons qu'un nombre est décimal s'il est possible de l'écrire sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

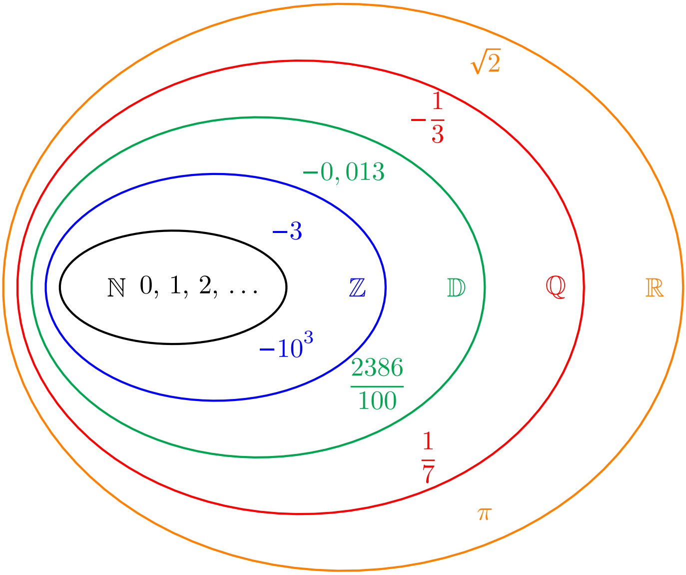
Exemples.

1. $-0,1 \in \mathbb{D}$.
2. $\frac{9078687656}{100} \in \mathbb{D}$.
3. Les nombres décimaux sont ceux qui admettent une écriture décimale finie.
4. Les nombres décimaux sont ceux qui admettent une écriture fractionnaire de la forme $\frac{a}{2^p \times 5^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n, p \in \mathbb{N}$.

Proposition 7

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ et $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, mais $\mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{D}$.

Nous pouvons résumer les inclusions entre les ensembles classiques étudiés avec un diagramme de Venn qui schématise la chaîne d'inclusion : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Il existe une multitude d'ensembles de nombres classiques. On distingue notamment les nombres algébriques et transcendants.

Il existe de plus gros ensembles de nombres que $\mathbb{R}$ ainsi $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes qui permet d'ajouter les solutions des équations polynomiales sans solutions dans $\mathbb{R}$ comme $x^2 + 1 = 0$.

Il existe aussi de nombreux sous-ensembles des entiers. Par exemple l'ensemble des nombres premiers que vous connaissez déjà mais aussi les nombres triangulaires, les nombres parfaits, ...

VI Exercices.

Exercice 1. A

Déterminez la décomposition en facteurs premiers de 180.

Exercice 2. A

Donnez la forme irréductible du nombre rationnel $\dfrac{120}{300}$.

Exercice 3. A

Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme de fraction irréductibles. :

a) $A = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{7}$

b) $B = \dfrac{1}{7} - \dfrac{4}{11}$

c) $C = \dfrac{-5}{3} + \dfrac{2}{7}$

d) $D = \dfrac{3}{-7} - \dfrac{-2}{3}$

Exercice 4. A

Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

a) $A = -\dfrac{-4}{7-3}$

b) $B = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{6}{7}$

c) $C = \dfrac{-2}{4} \times \left(-\dfrac{3}{-6}\right)$

d) $D = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{7}}$

e) $E = \dfrac{3}{\frac{5}{4}}$

f) $F = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{1}{7}} \times \dfrac{1}{2}$

Exercice 5. A

Calculez et donnez le résultat sous forme de fraction irréductible.

a) $A = \dfrac{-3}{2} + \dfrac{1}{5}$.

b) $B = \dfrac{2}{6} \times \dfrac{3}{7}$.

c) $C = \dfrac{35}{49} + \dfrac{56}{37}$.

d) $D = \dfrac{256}{47} \times \dfrac{245}{650}$.

e) $E = \dfrac{\frac{4}{6} + \frac{17}{3}}{56} + \dfrac{9}{13}$.

Exercice 6. C

Déterminez sans justification le plus petit ensemble classique auquel appartient le nombre proposé.

a) $\sqrt{17}$.

b) $-34\,509\,786$.

c) $-0,0223$.

d) $34,45218\ldots$.

e) $\dfrac{345}{100}$.

f) $\dfrac{24}{7}$.

g) $\dfrac{34}{2^3 \times 5^2}$.

h) $\dfrac{\frac{1}{3}}{14}$.

i) $3,234 \times 10^{45}$.

j) $\pi + 3$.

Exercice 7. C

Déterminez sans justification le plus petit ensemble classique auquel appartient le nombre proposé.

a) $-\dfrac{12}{3}$.

b) $-23{,}723\,723\,7\ldots$.

c) $\dfrac{76987}{10}$.

d) π.

e) $\sqrt{3}^2$.

f) $0,987654321 \times 10^9$.

g) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

h) $\dfrac{2}{250}$.

i) $3+\sqrt{2}$.

j) $\dfrac{1}{5}$.

VII Construction géométrique des nombres.

Avant de les considérer comme des nombres les Grecs manipulaient les rationnels en tant que rapport de grandeurs : 3 est par rapport à 6 ce que 1 est par rapport à 2. Nous parlerions, nous, du nombre $\frac{1}{2}$.

De même 6 est à 3 ce que 2 est à 1. Dans ce cas nous parlons nous de 2. Le nombre associé à un rapport est en fait le coefficient multiplicateur qui permet de passer de l'un à l'autre. Or si vous fûtes attentifs au collège qui dit coefficient multiplicateur dit en géométrie ...

Exercice 8.

Étant donné A, B et C trois points distincts non-alignés du plan, en utilisant la règle non graduée et le compas, dessinez la parallèle à (AB) passant par C.

Exercice 9.

Nous allons dessiner à la règle non graduée et au compas la longueur $\frac{3}{5}$.

1. Dessinez deux points distincts O et I (pas trop éloignés). Nous appellerons désormais 1 la longueur OI.
2. Construisez le point A sur la demi-droite $[OI)$ tel que $OA = 3$.
3. Dessinez un point J tel que OIJ soit isocèle rectangle en O.
4. Construisez le point B sur la demi-droite $[OJ)$ tel que $OB = 5$.
5. Notons M le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant J et (OI). Construisez M.
6. Dites où est dessinée la longueur $\frac{3}{5}$ sur la figure puis justifiez-le.

En considérant dans l'exercice précédent le repère (O, I, J) nous voyons que nous sommes désormais capable de dessiner à la règle et au compas tous les points à coordonnées rationnelles.